МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ (МОНУ)
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА (КДПУ)

Зв'язок неперервного та дискретного на прикладі рівняння коливання струни.

Робота з Теорії Систем та

Математичного Моделювання

студента 36 групи

фізико-математичного факультету

Спеціальність: 6.040302 «Інформатика»

Чігірьова Станіслава Петровича

2011 р.

Питання про рух, перехід поступових кількісних змін в якісні, поява у цілого властивостей, яких не має жодна із його частинок, є одним із ключових питань сучасного фундаментального природознавства. Ці питання мають глибокі філософські коріння. Розвиток природних наук змушує ще і ще раз повертатися до них. Вчених XIX ст. вразило наявність хвильових властивостей у світла, який вони уявляли як потік дискретних частин. До глибокого перегляду фундаментальних понять привело в XX ст. створення квантової механіки. Виявилось, що дискретні і неперервні властивості матерії не можна протипоставити один одному, що вони нерозривно зв’язані між собою. Виявилась і друга важлива обставина. Аналіз багатьох явищ потребує поєднання дискретного і неперервного підходів. І питання про співвідношення тих і інших властивостей при побудові теорії виявляється далеко не простим. Від його успішного вирішення часто залежить, наскільки глибоко нам вдається розібратися в досліджуваному об'єкті.

Розглянемо завдання, при рішенні якої були розвинені ряд ключових ідей. Проведемо аналіз поведінки пружної струни, по якій ударили в початковий момент часу. Зупинимося раніше на системі, що складається з точкового вантажу масою m, до якого прикріплені дві однакові пружні горизонтальні нитки завдовжки $l_0/2$, натягнуті силою F_0 (сила тяжіння відсутня). При відхиленні вантажу від положення рівноваги з'являється повертаюча сила, пропорційна відхиленню $F = -2F_0 \sin\alpha \approx 4F_0 u / l_0$,

тоді згідно з другим законом Ньютона маємо:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0, \quad \omega^2 = 4F_0/(ml_0).$$

Рівняння описує коливання з круговою частотою ω:

$$u = A\sin\omega t + B\cos\omega t,$$

де константи A і B визначаються початковими положеннями і швидкістю вантажу. Ми вирішили завдання про коливання струни, уся маса якої зосереджена в центрі. Для однорідної струни з масою m і завдовжки l_0 це занадто глибоке наближення; розумніше замінити її набором із N кульок з масою $\mu = m/N$, розташованих на відстані $h = l_0/N$ і сполучених нитками, натягнутими силою F_0 (так міркували, зокрема, при виведенні рівнянь коливань струни Йоганн і Данило Бернуллі). Якщо u_k - відхилення k-ої кульки від положення рівноваги, то за умови, що різниця у відхиленнях сусідніх кульок мала,

$$\mu a_k = \frac{mh}{l_0}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = F \approx F_0\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{F_0 l_0}{m}\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2}.$$

У межі при $h \to 0$ отримуємо вже відоме нам хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = F_0 l_0 / m.$$

Цей висновок рівняння уперше був зроблений Даламбером, який не лише записав вказане рівняння, але і знайшов його загальне рішення у вигляді суперпозиції двох хвиль

$$u = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Проте використати це рішення для струни кінцевих розмірів непросто. Дійсно, після удару по струні управо і вліво йдуть хвилі. Вони доходять до кінців струни, відбиваються, йдуть у зворотний бік - встановлюється деякий режим, описувати який за допомогою отриманої формули незручно. Можливий інший шлях, запропонований Фур'є. Оскільки струна здійснює коливальні рухи, рішення задачі шукають у виді

$u = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)z(x)$, що дає у результаті

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l_0} .$$

Рішення знайшлося у вигляді суперпозиції стоячих хвиль, для яких на довжині струни укладається ціле число n півхвиль. Власні значення λ_n визначають, з якою частотою може коливатися струна в конфігурації n-ої стоячої хвилі, форму якої описує власна функція $z_n = \sin(\pi n x / l_0)$.

Знайдені рішення по виду сильно розрізняються. Рівноправність їх не очевидна. Це питання стало причиною дискусії в середині XVIII ст. (суперечка про струну) між Ейлером, Даламбером і Лагранжем. Дискусія дозволила переконатися не лише в еквівалентності двох рішень(адже початкове завдання має рішення і воно єдине!), але і краще розібратися в рівняннях. Рішення, отримане Фур'є, дає можливість з'ясувати співвідношення безперервного і дискретного в цьому завданні. Якщо ми маємо автомодельне рішення хвилевого рівняння у вигляді стоячої хвилі $u = c_n(t) \sin(\pi n x / l_0)$, то виявиться, що для різних $c_n(t)$ виходять рівняння

$$\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 c_n(t) = 0, \quad \text{n=0, 1, 2, …}$$

Але це знову рівняння коливання. Значить, струна виявляється еквівалентною нескінченній безлічі незалежних вантажів, що коливаються.

Цікаво і інше: у безперервній задачі, що описує коливання струни, є дискретний набір власних частот. Неперервне і дискретне знову виявляються тісно пов'язаними.

Література.

1. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие. / Под редакцией П.В.Трусова. -Москва: Логос, 2004. -440с.
2. В.М. Томашевський Моделювання систем. –К.: Видавнича група ВНУ, 2005. -352с.