

*В поисках истины логика нащупывает свой путь по отклонениям от обычного и заурядного.*

Э. По

Оскільки більшість раніше розглянутих прикладів склали хвилі, те не можна не розповісти про нелінійні хвилі на дрібній воді, до яких відносять цунамі. Цунамі - надзвичайно високі й потужні хвилі, що обрушуються на узбережжя океанів. Найчастіше цунамі виникають у результаті сильних підводних землетрусів, що супроводжуються швидким утворенням на дні океану скидань, обвалів і зсувів. Швидкий зсув блоків гірських порід, немов гігантський поршень, виштовхує величезні маси води у вигляді горба на поверхню океану. Неймовірно страшна хвиля висотою 30-40 м образовалась при вибуху вулкана Кракатау в 1883 р., протягом декількох хвилин вона зміла з індонезійських островів 35 тисяч чоловік.

Цунамі надзвичайно стійкі - віддаляючись від свого (практично крапкового) джерела на багато тисяч кілометрів, вони здатні перетнути Тихий океан. Так, Чилійське цунамі в 1960 р. нанесло значну втрату Японським і Курильським островам.

Ці хвилі дуже довгі (довжина хвилі становить 100-300 км) і пологі - навіть найсильніші цунамі мають у відкритому океані висоту не більш ніж 2 м. Судна, які виявилися у відкритому океані на шляху цунамі, звичайно не відчують їх. Швидкість цих хвиль - колосальна, залежно від глибини океану може досягати від 400 до 850 км/ч. Висота цунамі зменшується над більшими глибинами й збільшується на мілководді. Швидкість, навпроти, зростає на більших глибинах і знижується на малій глибині. Підходячи до берегу, довжина й швидкість хвилі зменшуються, а її висота збільшується (кінетична енергія перетворюється в потенційну), хвиля приймає різко асиметричну форму й перекидає свій гребінь уперед, тараном обрушуючись на берег.

Імовірно, читач відразу відзначив, що деякі деталі вказують на нелінійну природу цих хвиль (наприклад, існування залежності швидкості від амплітуди). Тому будувати лінійні моделі тут безглуздо, вони не будуть адекватними. Імовірно, першим натуралістом, зачарованим нелінійною хвилею, був англієць Дж. Рассел (до речі, конструктор гігантського океанського лайнера «Грейт Істерн», з якого укладався перший трансатлантичний телеграфний кабель). В 1834 р., прогулюючись верхи уздовж вузького судноплавного каналу, він помітив, як від зупиненої баржі відокремилося й побігло вперед велике одиночне піднесення («водяний пагорб»), що продовжувало свій шлях, анітрошки не міняючи своєї форми й не знижуючи швидкості, поки, як писав Рассел, «через одну або дві милі погоні я не втратив його з виду». Це спостереження надихнуло Рассела провести експериментальне вивчення поверхневих хвиль на воді, у результаті чого були відтворені відокремлені хвилі й отриманий вираз для швидкості їхнього поширення

$$v = \sqrt{g(h + \eta)}$$

де  $g$  — прискорення вільного падіння;  $h$  — глибина спокійної рідини;  $\eta$  - висота гребеня хвилі над поверхнею спокійної рідини. Помітимо: швидкість поширення хвилі залежить від її амплітуди! Цей результат спостережливого вченого не був зрозумілий багатьма відомими його колегами й полеміка тривала півстоліття, поки голландці Д. Кортевег і Г. де Фриз не вивели свого рівняння дрібної води:

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0$$

Це рівняння – квазілінійне, параболічного типу;  $v$  - швидкість матеріальної точки рідини, нижній індекс, як і раніше, позначає частинну похідну по відповідному аргументі.

Далі розглянемо інше нелінійне рівняння поширення нелінійних хвиль, що володіє всіма особливостями рівняння для опису цунамі, - інтегродиференціальне рівняння в частинних похідних

$$v_t + vv_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)v_s(s,t)ds = 0 \quad (6.58)$$

запропоноване в 1967 р. Дж. Уиземом. Але спочатку зупинимося на важливих «атрибутах» нелінійних хвиль - дисперсії й нелінійності.

Нехай розглядається лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних по  $x$  и  $t$  (з постійними коефіцієнтами), що у символічній формі має вигляд

$$P(\partial/\partial t, \partial/\partial x) v = 0, \quad (6.59)$$

де  $P$  - деякий поліном. Підставимо рішення в нормальній формі

$$v = A \exp(ikx - i\omega t), \quad (6.60)$$

де  $k$  - хвильове число (речовинне);  $\omega$  - частота (комплексне число), у рівняння (6.59):

$$G(\omega, k)A \exp(ikx - i\omega t) = 0,$$

де  $G$  — поліном. Експонента не може звертатися в нуль при всіх  $x, t$ , тому нетривіальне рішення (6.59) ( $A \neq 0$ ) існує, якщо  $k$  й  $\omega$  зв'язані дисперсійним співвідношенням

$$G(\omega, k) = 0. \quad (6.61)$$

Припустимо, що (6.61) дозволяє визначити  $\omega$  як речовинну функцію хвильового числа  $k$ . Для кожної моди (тобто кожного  $k$ ) точки постійної фази переміщуються з фазовою швидкістю

$$c = \omega/k. \quad (6.62)$$

Якщо відсутня залежність фазової швидкості від хвильового числа  $k$ , тобто

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0, \quad (6.63)$$

то говорять, що хвиля, описувана рівнянням (6.59), переміщується без дисперсії. У протилежному випадку має місце дисперсія хвиль, фазова швидкість їх стає різною й поведінка рішення залежить від того, як хвилі інтерферують одна з другою. У такій ситуації вводять групову швидкість  $c_g = d\omega/dk$ , значення, яке полягає в тому, що після закінчення досить великого часу кожне хвильове число домінує в рішенні в області  $x \sim c_g t + O(t)$ .

Дисперсійне рівняння для хвильового рівняння (6.7) було нами вже отримано (6.21):  $\omega = \pm ak$ , звідки  $c = a$ , отже, хвилі поширюються без дисперсії.

Для рівняння дифузії (6.53) маємо  $\omega = ck^2$ , звідки  $c = c_r/2 = ck$  ( $k$  — коефіцієнт дифузії), тобто спостерігається дисперсія хвиль (інше було б дивно для рівняння дифузії). Як уже відомо, рішення (6.59) можуть бути представлені у вигляді суперпозиції (суми або інтеграла) по  $k$  хвиль виду (6.60). Тому зміст дисперсії хвиль - в «розмазуванні» із часом хвильового збурювання по просторі. Недиспергуючі середовища переносять це збурювання без зміни його форми.

Сказане ставиться до лінійних рівнянь і до залежності  $\omega(k)$  (не плутати із залежністю швидкості хвилі від її амплітуди  $c(A)$ , що існує тільки для нелінійних хвиль). У просторовому випадку (тобто коли незалежні змінні диференціального рівняння суть  $t, r$ ), нормальна форма рішення має вигляд плоскої хвилі  $v = A \exp(ikx - i\omega t)$ , ( $k$  - хвильовий вектор).

У неоднорідних, або нелінійних, середовищах рівняння (6.59) стає майже лінійним, квазілінійним або сильно нелінійним, і спроба дати визначення дисперсії хвиль скрутна, оскільки в згаданих рівнянь, як правило, відсутні рішення у вигляді плоских хвиль.

Для дослідження дисперсійних властивостей рівняння Уизема розглянемо допоміжне лінійне рівняння

$$v_t + vv_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)v_s(s,t)ds = 0 \quad (6.64)$$

Підставляємо в нього рішення виду (6.60):

$$v_t + vv_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)i\omega \exp(ikx)ds = 0$$

Після ділення на  $ik \exp(ikx)$  і заміни змінної  $x-s = y$  під інтегралом одержуємо

$$c(k) = \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(y) \exp(-iky) dy.$$

Оскільки права частина являє собою перетворення Фур'є ядра  $K(y)$ , виконуючи зворотне перетворення, запишемо

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \exp(ikx) dk$$

Таким чином, задаючись будь-якою бажаною функцією  $c(k)$  (дисперсійною залежністю), можна визначити відповідне ядро  $K(x)$ , тобто модельне рівняння описує дисперсію хвиль.

Тепер зупинимось на питанні нелінійності. Нелінійність рівняння Уизема (6.58) пов'язана з конвективним членом  $vv_x$ . Найпростіше рівняння в частинних похідних, що володіє цією нелінійністю, має вигляд

$$v_t + vv_x = 0 \quad (6.65)$$

і зветься рівняння Ейлера [23]. Постачимо його початковими умовами

$$v(x,0) = v_0(x). \quad (6.66)$$

Але (6.65) нам уже зустрічалося раніше. Комбінація  $v_t + vv_x$  часто є присутньою у рівняннях динаміки рідини й газу й, як було показано, з'являється при переході від матеріальних (лагранжевих) координат до просторового (ейлерових). Без такого переходу замість вихідного квазілінійного рівняння виду

$v_t + vv_x + L(v) = 0$  мали б майже лінійне рівняння  $\dot{v}_t + \tilde{L}(v) = 0$ : позбувшись від  $vv_x$ , одержуємо неоднорідні коефіцієнти в іншій частині оператора —  $\tilde{L}(v)$ . Однак у цьому випадку будемо мати рішення, певне в матеріальні (лагранжових) змінних, координати яких у просторі самі вимагають визначення із системи диференціальних рівнянь (яких?). При описі розвиненого турбулентного руху другий підхід є набагато складніше. До того ж у механіку рідини й газу граничні умови частіше задаються на просторовій (нерухомій) границі області (канали, резервуари або просто довільна область простору, крізь яку стаціонарно тече середовище).

Раніше було знайдене рівняння характеристик для (6.65):  $dx/dt = v(x, t)$ . Якби поле  $v(x, t)$  було постійним, то загальне рішення (6.65) мало б вид  $v = f(x - vt)$ . Підстановка такого подання у вихідне рівняння з урахуванням початкових умов дає нам неявне рішення

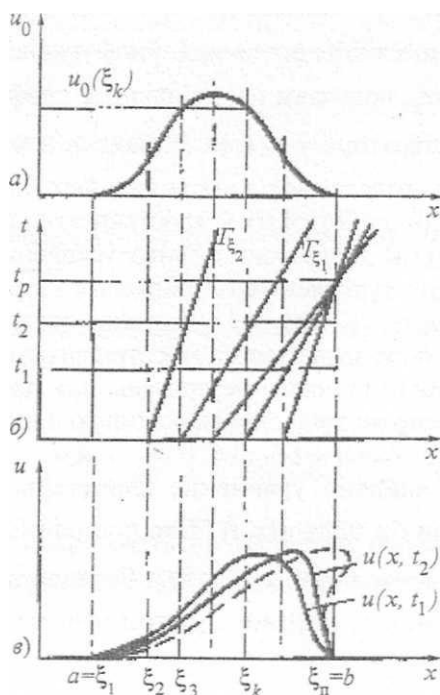
$$v = v_0(x - vt), \quad (6.67)$$

знаходячи деяку залежність швидкості від амплітуди (а чи не дозволить нам це описати властивості хвиль цунамі й перекидання хвиль?).

Якісну відповідь на питання можна одержати за допомогою характеристик. Нехай початкова функція  $v_0(x)$  має вигляд представлений на мал. 6.7, а. Виберемо матеріальну точку з координатою  $\xi$  і побудуємо минаючу через неї характеристику  $\Gamma_\xi$ :  $x = \xi + v_0(\xi)t$  с кутом нахилу  $1/v_0(\xi)$  (мал. 6.7, б).

Виберемо момент часу  $t$  і визначимо графічно з мал. 6.1, б айлерову координату  $x_k$  матеріальної частки  $\xi$ . Тепер точку  $x, v_0(\xi)$  можна відкласти на площині  $(x, v)$ . Виконавши цю процедуру з усіма матеріальними точками  $\xi$  осі, одержимо профіль  $v(x, t)$  хвилі на площині  $(x, v)$ .

Звернемося знову до мал. 6.7, а, б і помітимо, що при даному початковому профілі характеристики повинні неминуче перетнутися, починаючи з деякого  $t_p$ . Це означає, що при  $t > t_p$  функція  $v(x, t)$  виявляється неоднозначною (мал. 6.7, в).



Неважко побачити, що рівняння Уізема містить у собі обоє розглянутих модельних рівняння. При цьому єдинокорство механізмів перекидання (руйнування) і дисипації хвиль приводить до досить багатой динаміки рівняння. Теоретичні дослідження показали, що, по-перше, це рівняння має рішення типу відокремлених хвиль, що поширюються з незмінною формою й постійною швидкістю. Швидкість таких хвиль монотонно збільшується з ростом амплітуди, причому існує гранична амплітуда. При цьому виявляється, що гребінь хвилі із граничною амплітудою загострюється.

Рис. 6.7. Поведение решения уравнения Эшера [23]

Рівняння має й періодичні рішення, що володіють тими ж особливостями. По-друге, існують режими, при яких хвилі руйнуються.

З побудованих графіків й (6.67) видно, що чим більше амплітуда початкової швидкості  $v_0(x)$  матеріальної точки в  $x$ , тим з більшою швидкістю вона поширюється. Гребінь хвилі неминуче випереджає її підоснову. Тобто рівняння Ейлера описує перекидання хвиль! Тут потрібно відзначити, що інтерпретація цього явища залежить від того, що розуміти під змістом рішення рівняння. Якщо допустити неоднозначні рішення  $v(x, t)$ , то зштовхнемося з перекиданням хвилі, а якщо вважати його однозначним, то рівняння Ейлера опише руйнування хвилі, тобто утворення розриву швидкості. Таке рішення буде розумітися в іншому, неklasичному змісті.

Цікаво досліджувати процес набігання хвиль на берег. Вибираючи дисперсійне співвідношення (у нас є таке право) у вигляді

$$C(k) = \sqrt{g \operatorname{th}(kh)/k},$$

де  $A$  - глибина,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $\operatorname{th}$  - гіперболічний тангенс, і обчислюючи по ньому ядро  $K(x)$ , а також припускаючи берег пологим (тобто  $p$  постійно на кожному етапі еволюції хвиль), одержуємо наступну картину (рис, 6.8). Там, де глибина порівняно більша, хвилі є гладкими, періодичними, що біжать; не лінійність при цьому грає лише роль фактору, що стримує дисперсію. При переході в область менших глибин задні гребені хвиль, що мають більшу швидкість поширення, починають доганяти передні, у результаті чого відбувається зменшення довжини хвилі. Однак енергія хвиль, залишаючись незмінною (а це ще одна чудова властивість цього рівняння), приводить до збільшення амплітуди хвиль. Процес відбувається до деякої граничної амплітуди й супроводжується загостренням хвиль (нелінійність тут проявляє себе саме в цьому). Хвилі граничної амплітуди, переходячи на мілководдя, починають перекидатися, оскільки при  $h \rightarrow 0$   $K(x) \rightarrow 0$ , і нелінійність повністю «перемагає» дисипацію.

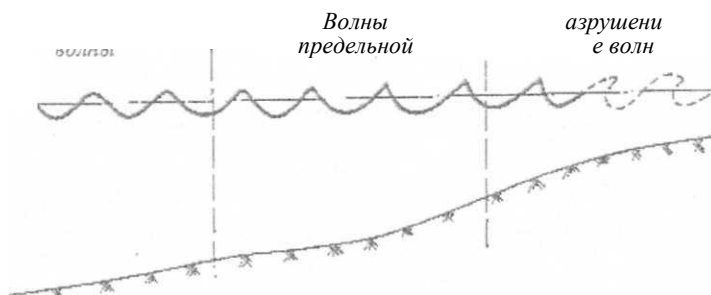


Рис. 6.8. Зависимость профиля волнового решения уравнения Уизема от глубины [23]

Необхідно сказати, що тут нами було почато якісне моделювання явища. Ми не виводили рівняння руху хвиль на поверхні рідини, а споконвічно вивчали властивості деяких модельних рівнянь, з яких скомбіноване рівняння Уизема. Такий шлях, що вимагає великої фізичної інтуїції, є досить коштовним, але не заміняє собою прямого («справедливого») шляхи побудови моделі: постановки проблеми, прийняття гіпотез, висновку рівнянь

й їхнього дослідження. Фахівець в області математичного моделювання повинен опанувати обома підходами.