МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

ЗВ'ЯЗОК НЕПЕРЕРВНОГО Й ДИСКРЕТНОГО НА ПРИКЛАДАХ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ Й РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

Доповідь з «Теорії систем та математичного моделювання»
студента 36 групи
фізико-математичного факультету
Спеціальність: 6.040302 «Інформатика»
Зеленського Вадима Сергійовича

Кіровоград 2011

Питання про рух, перехід поступових кількісних змін у якісні, поява в цілого властивостей, якими не володіє жодна з його частин, є одними із ключових питань сучасного фундаментального природознавства. Ці питання мають глибоких філософських корінь. Розвиток природничих наук змушує ще і ще раз повертатися до них. Вчених XIX в. вразила наявність хвильових властивостей у світла, яке вони представляли як потік дискретних часток. До глибокого перегляду фундаментальних понять привело в XX в. створення квантової механіки. Виявилося, що дискретні й безперервні властивості матерії не можна протиставляти один одному, що вони нерозривно зв'язані між собою. З'ясувалася й інша важлива обставина. Аналіз багатьох явищ вимагає сполучення дискретного й неперервного підходів. І питання про співвідношення тих й інших властивостей при побудові теорії виявляється далеко не простим. Від його успішного розв’язку часто залежить, наскільки глибоко нам вдається розібратися в досліджуваному об'єкті.

Розглянемо завдання, при вирішенні якого був розвинений ряд ключових ідей. Проведемо аналіз поводження пружної струни, по якій вдарили в початковий момент часу. Зупинимося на системі, що складається із точкового вантажу масою m, до якого прикріплені дві однакові пружні горизонтальні нитки довжиною $l_0/2$ натягнуті силою F_0 (сила тжіння відсутня). При відхиленні вантажу від положення рівноваги з'являється протилежна сила, що повертає, вона пропорційна відхиленню $F = -2F_0 \sin\alpha \approx 4F_0 u/l_0$, тоді відповідно до другого закону Ньютона маємо:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0, \qquad \omega^2 = 4F_0/(ml_0).$$

Рівняння описує коливання із круговою частотою ώ:

$$u = A\sin\omega t + B\cos\omega t,$$

де константи A и B визначаються початковими положенням і швидкістю вантажу. Ми вирішили завдання про коливання струни, вся маса якої зосереджена в центрі. Для однорідної струни з масою т і довжиною l_0 це занадто грубе наближення; розумніше замінити її набором з N кульок з масою *η=m/N*, розміщених на відстані $h=l_0/N$ і з'єднаних нитками, натягнутими силою u_k. Якщо $и_к$ - відхилення к-ї кульки від положення рівноваги, то за умови, що різниця у відхиленнях сусідніх кульок мала,

$$\mu a_k = \frac{mh}{l_0}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = F \approx F_0\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{F_0 l_0}{m}\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2}.$$

У межі при h→0 одержуємо вже відоме нам хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = F_0 l_0 / m.$$

Цей вивід рівняння вперше був зроблений Даламбером, що не тільки записав зазначене рівняння, але й знайшов його загальний розв'язок (6.39) у вигляді суперпозиції двох хвиль:

$$u = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Однак використати даний розв'язок для струни кінцевих розмірів непросто. Дійсно, після удару по струні вправо й уліво йдуть хвилі. Вони доходять до кінців струни, відбиваються, ідуть у зворотну сторону - встановлюється якийсь режим, описувати який за допомогою отриманої формули незручно. Можливий інший шлях, запропонований Фур'є. Тому що струна робить коливальні рухи, розв'язок задачі шукають у вигляді

$$u = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)z(x),$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l_0}.$$

Розв’язок знайшовся у вигляді суперпозиції стоячих хвиль, для яких на довжині струни укладається ціле число n напівхвиль. Власні значення визначають, з якою частотою може коливатися струна в конфігурації n-й стоячої хвилі, форму якої описує власна функція $z_n = \sin(\pi n x / l_0).$

Знайдені розв’язоки зовні сильно різняться. Рівноправність їх не очевидна. Це питання стало причиною дискусії в середині XVIII в. (суперечка про струну) між Эйлером, Даламбером і Лаграижем. Дискусія дозволила переконатися не тільки в еквівалентності двох рішень (адже вихідне завдання має Розв’язок й воно єдине!), але й краще розібратися в рівняннях. Розв’язок, отриманий Фур'є, дає можливість з'ясувати співвідношення неперервного й дискретного в цьому завданні. Якщо ми маємо автомодельний розв’язок хвильового рівняння у вигляді стоячої хвилі що дає в підсумку $u = c_n(t)\sin(\pi n x / l_0),$ то виявиться, що для різних $c_n(t)$ виходять

$$\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 c_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Але це знову рівняння коливань. Виходить, струна виявляється еквівалентною нескінченній безлічі незалежних коливних вантажів.

Цікаво й інше: у неперервній задачі, що описує коливання струни, є дискретний набір власних частот. неперервне і дискретне знову виявляються тісно зв'язаними.

Глибокий зв'язок дискретного й неперервного відзначена й у фізиці мікросвіту, де в одних випадках матерію зручно розглядати як електромагнітну хвилю, а в інші - як потік часток (квантів). Мікрочастинки в деяких дослідах поводяться як хвилі, наприклад, випробовуючи дифракцію й інтерференцію. У той же час було встановлено, що світло (хвиля) квантуется, реєструються дискретні порції світла - фотони. Виявилося, що й тут досить гармонічний дуалізм може бути описаний за допомогою лінійного рівняння математичної фізики - рівняння ШРЕДІНГЕРА. Вираження найпростішої (плоскої) хвилі, що описує коливання в просторі із частотою ω і хвильовим вектором k, записується як exp(ikx-iwt).

Співставимо цій хвилі частку з енергією E=ηw й імпульсом p=hk, де h - постійна Планка. Виразивши ω і k з останніх співвідношень і підставивши їх у формулу для хвилі, одержимо хвильову функцію для частки з енергією E и імпульсом p:

$$\psi(x,t) = \exp\left(i\frac{p}{h}x - i\frac{E}{\hbar}t\right).$$

Ця комплексна функція визначає щільність імовірності знаходження частки в часі й просторі. Неважко переконатися в справедливості тотожностей

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \quad \text{и} \quad -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = p^2\psi.$$

Але це означає, що енергія E є власним значенням оператора $-\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dt}$, а квадрат імпульсу p^2 — власним значенням оператора $-h^2 \Delta\Psi$, при цьому Ψ в обох випадках виступає як власна функція.

Якщо частка маси m рухається в потенційному полі V(x), то в силу закону збереження енергії $E = p^2/2m + V.$ Щоб одержати хвильовий аналог цього співвідношення, ми повинні замінити *E*, p^2 й *V* відповідними диференціальними операторами:

$$-\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi,$$

звідки й випливає фундаментальне рівняння хвильові й квантової механіки

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi,$$

(6.47)

відкрите австрійським фізиком Эрвином Шредінгером в 1926 р. Воно описує рух частки в заданому потенційному полі.

Квадрат амплітуди хвильової функції $\int_G \psi(x,t)\psi^*(x,t)dx \equiv P(G,t)$ визначає ймовірність P(G,t) знаходження частки в момент часу t в області G. Для оператора можна поставити завдання на власні значення:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi\psi^* dx = 1,$$

у результаті чого одержимо спектр $E_п$ значень енергії частки, які вона може приймати, рухаючись у заданому потенційному полі. Відповідні ним власні функції показують, з якою ймовірністю можна виявити частку в різних точквх простору.

Вирішивши рівняння ШРЕДІНГЕРА для кулонівского потенціалу $V=e^2/r$ (e - заряд електрона, r - відстань до протона), можна знайти енергетичні рівні атома водню, з величезною точністю згідно з експериментом.

До появи рівняння ШРЕДІНГЕРА існувала матрична квантова механіка Гейзенберга, що використає як апарат простір нескінченновимірних векторів з обмеженим скалярним квадратом. Теорія ШРЕДІНГЕРА використовує векторний простір функцій з обмеженим скалярним квадратом (уводять через інтеграл). З точки зору функціонального аналізу ці простори є еквівалентні представленню гільбертового простору.

Одна із самих чудових ідей Давида Гільберта полягає в тому, щоб розглядати простори функцій як евклідові. Шредінгер першим побачив у квантованості станів аналогію із проблемою власних значень лінійного диференціального оператора. Однак розповідають, що ще до відкриття Шредінгером свого рівняння до Гильберта в Геттінген приїжджали фізики й задавали йому питання про зміст матриць у теорії Гейзенберга, на який Гильберт відповів, що звичайно такі таблиці з'являються при рішенні деяких диференціальних рівнянь. Фізики вирішили, що Гильберт просто не зрозумів питання, а через рік Шредінгер відкрив своє знамените рівняння.

Література

1. Ашихмин В.Н., Гитман М.Б., Келлер И.Э., Наймарк О.Б., Столбов В.Ю., Трусов П.В. (ред.), Фрик П.Г. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие. - М.: Логос, 2005. 440 с.
2. Самарский А., Михайлов А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М., ФИЗМАТЛИТ, 2005
3. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. - М.: КомКнига, 2007
4. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. В 2-х т. - М.: Наука, 2005